混合回帰空間自己回帰モデルの有効な自己回帰パラメータ範囲

東京大学　力丸佑紀

（株）データサイエンスコンソーシアム　柴田里程

混合空間自己回帰モデル

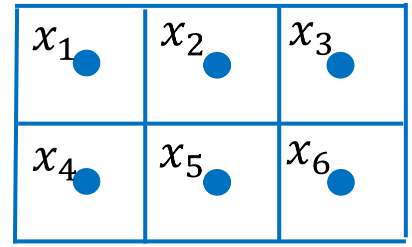
混合回帰空間自己回帰(MRSAR)モデル

$$\boldsymbol{z} = \lambda W \boldsymbol{z} + X\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$
$$\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\boldsymbol{0}, \sigma^2 I)$$

- 空間重み行列 W
  - 空間内の 2 地点 i, j に依存関係がある場合，それに対応する要素を $w_{i,j} \neq 0$ で与え，依存関係がない場合，要素を 0 とする行列

よく使われる空間重み行列 W

- 隣接行列



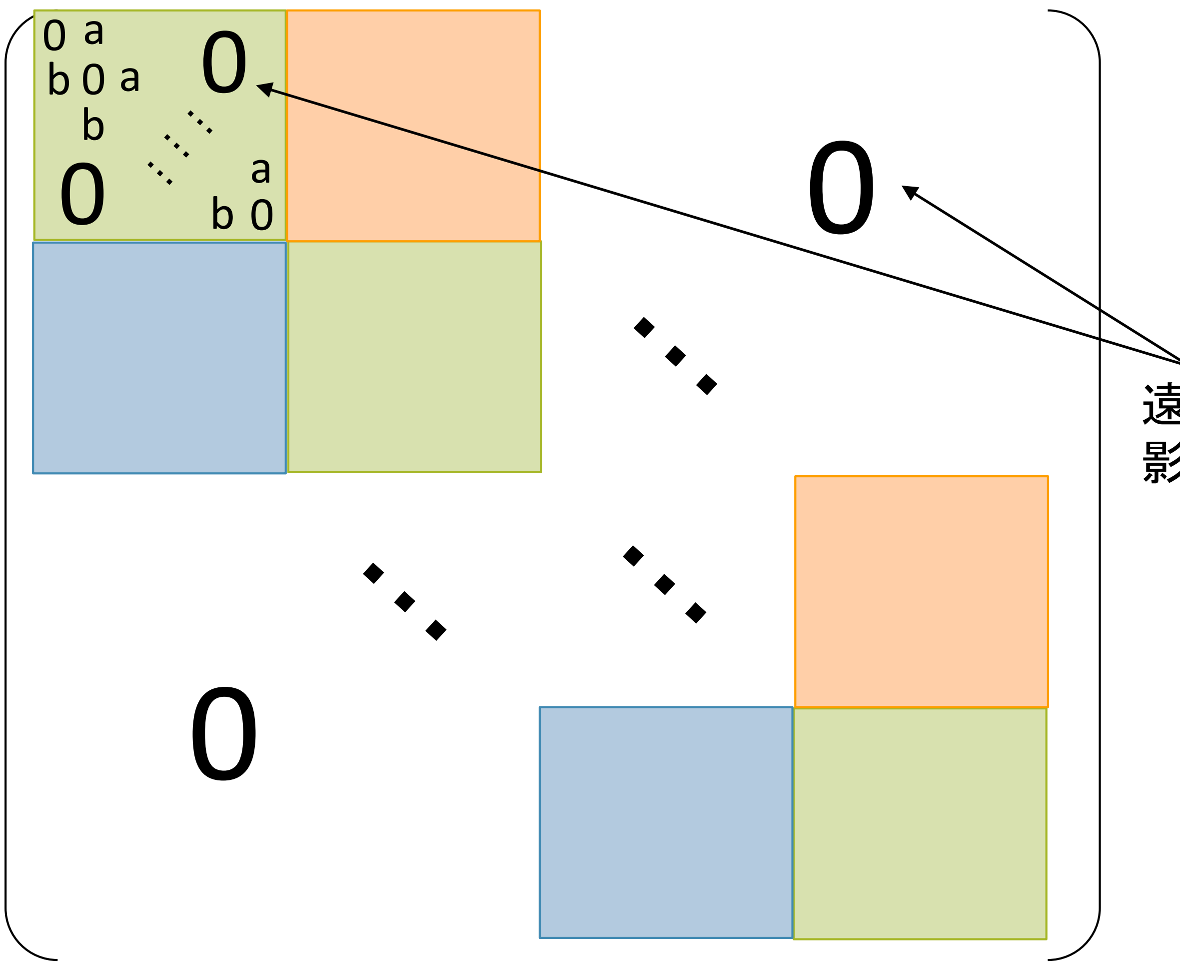
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- 距離の逆数を要素とする行列

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/2 & 1 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{5} \\ 1 & 0 & 1 & 1/\sqrt{2} & 1 & 1/\sqrt{2} \\ 1/2 & 1 & 0 & 1/\sqrt{5} & 1/\sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{5} & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/\sqrt{2} & 1 & 1/\sqrt{2} & 1 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{5} & 1/\sqrt{2} & 1 & 1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Wの設定

- 帯行列のクロネッカー積



遠くの地点の
影響は受けない

Lee(2004)の条件

- 最尤法によるパラメータ推定で，8つの条件が必要
- ✓ $\boldsymbol{\varepsilon}$ は $N(\mathbf{0}, \sigma^2 I)$ にしたがう
- ✓ W の (i, j) 成分 w_{ij} は一様に $O(1/h_n)$
- ✓ $\lim_{n\to\infty} \inf h_n > 0$ かつ $\lim_{n\to\infty} h_n/n = 0$
- ✓ $S(\lambda) = I - \lambda W$ は正則行列
- ✓ W と $S(\lambda)^{-1}$ は行和と列和に関して一様に有界
- ✓ X の任意の成分は n に関して一様に有界であり， $\lim_{n\to\infty} X^T X/n$ が存在して正則行列
- ✓ Λ を R のコンパクト集合，λ_0 を Λ の内点とする． Λ 上で $S(\lambda)^{-1}$ は λ および n に関して一様に行和および列和が有界
- ✓ $\lim_{n\to\infty} (X, WS^{-1}X\beta_0)^T (X, WS^{-1}X\beta_0)/n$ が存在して，正則行列

Lee(2004)の条件

- 最尤法によるパラメータ推定で，8つの条件が必要
- ✓ $\boldsymbol{\varepsilon}$ は $N(\mathbf{0}, \sigma^2 I)$ にしたがう
- ✓ W の (i,j) 成分 w_{ij} は一様に $O(1/h_n)$
- ✓ $\lim\inf_{n\to\infty} h_n > 0$ かつ $\lim_{n\to\infty} h_n/n = 0$
- ✓ $S(\lambda) = I - \lambda W$ は正則行列
- ✓ W と $S(\lambda)^{-1}$は行和と列和に関して一様に有界
- ✓ Xの任意の成分は n に関して一様に有界であり，$\lim_{n\to\infty} X^T X/n$ が存在して正則行列
- ✓ Λ を R のコンパクト集合，λ_0 を Λ の内点とする． Λ 上で $S(\lambda)^{-1}$ は λ および n に関して一様に行和および列和が有界
- ✓ $\lim_{n\to\infty} (X, WS^{-1}X\beta_0)^T (X, WS^{-1}X\beta_0)/n$ が存在して，正則行列

$S(\lambda)$ の正則性

- $\det(S(\lambda)) = \det(I - \lambda W) \neq 0$
  $\Leftrightarrow \lambda$ は W の固有値の逆数ではない

- W の固有値

$$\xi_{\boldsymbol{j}}(W) \approx \sum_{\boldsymbol{k} \in K} w_{\boldsymbol{k}} \exp\left(i \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{j}}^T \boldsymbol{k}\right)$$

$$\omega_{n_\ell, j_\ell} = \frac{2\pi i (j_\ell - 1)}{n_\ell}, \qquad j_\ell = 1,2, \dots, n_\ell$$

  - Wが対称なら，$\xi_{\boldsymbol{j}}(W)$ はすべて実数
  - n が増えるほど，固有値の数は増える

$S(\lambda)$ の正則性

- W の固有値が存在する範囲

$$\left|\xi_{\boldsymbol{j}}(W)\right| < \sum_{\boldsymbol{k}\in K} |w_{\boldsymbol{k}}|$$

  - n が増えるほどこの範囲内に密に固有値が存在

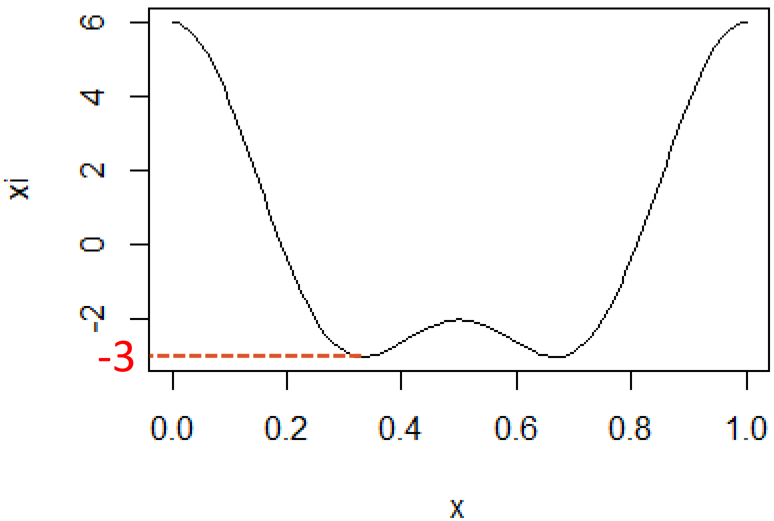
- W が対称行列の場合，
  $S(\lambda)$ が正則になるための十分条件

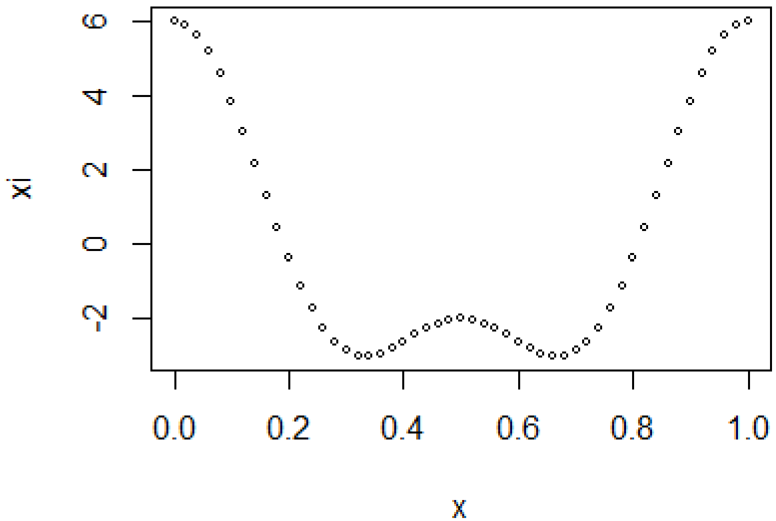
$$|\lambda| < \frac{1}{\sum_{\boldsymbol{k}\in K} |w_{\boldsymbol{k}}|}$$

  - 固有値に関係ない範囲
  - 下側は実際には少し広い範囲

例）

- 2つ隣まで依存関係あり（$k=\pm 1, \pm 2$）
- $w_1 = w_{-1} = 2, w_2 = w_{-2} = 1$





$$\xi = \sum_{k=-2}^{2} w_k \exp(2\pi i x k)$$
$$0 \le x < 1$$

$$\xi_j = \sum_{k=-2}^{2} w_k \exp\left(\frac{2\pi i (j-1) k}{n}\right)$$
$$n = 50$$

$S(\lambda)$ が絶対正則な範囲　$-\frac{1}{3} < \lambda < \frac{1}{6}$

範囲外では何が起きるか

- $S(\lambda)$ が非正則な点では尤度が$-\infty$

$$L = \frac{1}{2} \log \det \left(\frac{S(\lambda)^T S(\lambda)}{\sigma^2} \right) - \frac{N}{2} \log 2\pi$$
$$- \frac{1}{2} (\boldsymbol{z} - S(\lambda)^{-1} X \boldsymbol{\beta})^T \frac{S(\lambda)^T S(\lambda)}{\sigma^2} (\boldsymbol{z} - S(\lambda)^{-1} X \boldsymbol{\beta})$$

  - 非正則な点の付近でも

→ 最尤推定量が求まらない

$\hat{\lambda}$ だけでなく，$\widehat{\boldsymbol{\beta}}$，$\widehat{\sigma^2}$ も

範囲内なら

- $\{z_{\boldsymbol{v}}\}$ は漸近定常
  - $\{z_{\boldsymbol{v}}, \boldsymbol{v} \in N_{n_1,n_2}\}$ が漸近定常
    - $N_{n_1,n_2} = \{(v_1, v_2); |v_1| \le n_1, |v_2| \le n_2\}$

    ある $\gamma_{\boldsymbol{v}}, \boldsymbol{v} \in R^2$ が存在して，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある(N_1, N_2) が存在して，すべての $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \in N_{n_1,n_2}$ と $n_1 \ge N_1, n_2 \ge N_2$ に対して

$$\left|\gamma_{\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}'} - \gamma_{\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}'}\right| < \varepsilon$$

- 一致性，漸近正規性，漸近有効性をもつ推定量を求められる
  - Rikimaru and Shibata(2016) を活かして証明可能
    - 定常過程におけるSARモデルの新しい近似尤度の提案
    - 一致性，漸近正規性，漸近有効性をもつことを証明

結論

- W が帯行列のクロネッカー積で対称の場合，

$$|\lambda| < \frac{1}{\sum_{\boldsymbol{k} \in K} |w_{\boldsymbol{k}}|}$$

  の範囲内なら安全に推定できる
  - Wの固有値を求めなくても求まる範囲
  - しかも良い推定量が得られる
- 範囲外の場合，注意しなければならない
  - $\boldsymbol{\beta}$ も含め，推定が信用できない可能性