空間斉次自己回帰モデルのフィッシャー情報量行列の正則条件

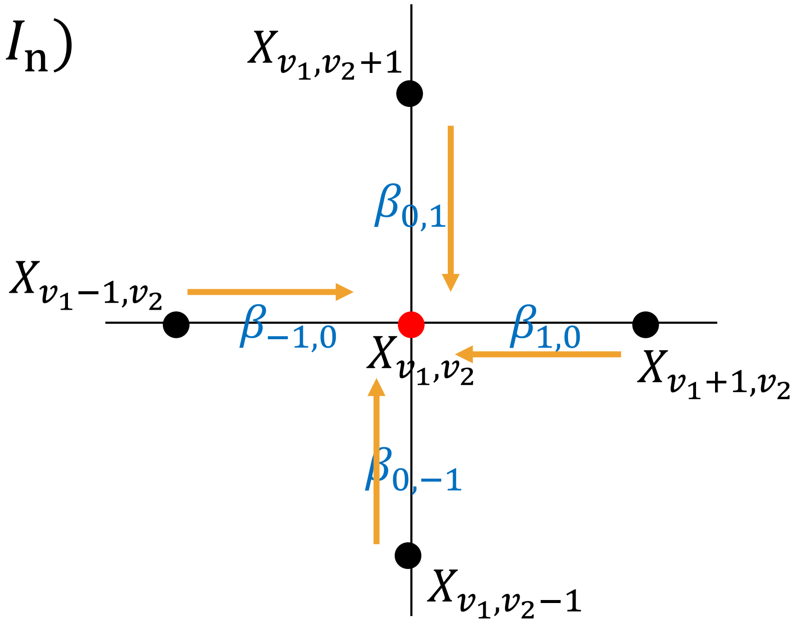
早稲田大学　力丸佑紀（発表者）

（株）データサイエンスコンソーシアム／慶應義塾大学／早稲田大学　柴田里程

弱定常空間斉次自己回帰モデル

- n 次元弱定常空間斉次自己回帰モデル

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in K} \beta_{\boldsymbol{k}} X_{\boldsymbol{v}+\boldsymbol{k}} = \varepsilon_{\boldsymbol{v}}, \quad \beta_{\boldsymbol{0}} = 1, \quad \varepsilon_{\boldsymbol{v}} \sim \mathrm{N}(\boldsymbol{0}, \sigma^2 I_{\mathrm{n}})$$



  - K は $\boldsymbol{0}$ を含む有限集合（方向性がない形）

    （例）$n = 2$，$K = \{(0,0), (1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)\}$

  - $\varepsilon_{\boldsymbol{v}}$ はイノベーションではない

    すべての $\boldsymbol{u}$ について，$E(X_{\boldsymbol{u}} \varepsilon_{\boldsymbol{v}}) \neq 0$

  - $\boldsymbol{k} \notin K$ のとき，$\beta_{\boldsymbol{k}} = 0$ とする.

伝達関数を用いた表現

- 伝達関数を用いた表現

$$P(T_1, \dots, T_n)X_{\boldsymbol{v}} = \varepsilon_{\boldsymbol{v}}$$

ただし，伝達関数 $P(T_1, \dots, T_n) = \sum_{\boldsymbol{k} \in K} \beta_{\boldsymbol{k}} T_1^{k_1} \cdots T_n^{k_n}$,　$T_i X_{\boldsymbol{v}} = X_{v_1, \dots, v_i + 1, \dots, v_n}$

- 仮定（弱定常性）

$P(z_1, \dots, z_n) = 0$ は $|z_1| = \cdots = |z_n| = 1$ 上で根をもたない

フィッシャー情報量行列の極限 $I(\theta)$

- 空間斉次自己回帰モデルにおけるフィッシャー情報量の極限の(p, q)要素

$$\{I(\boldsymbol{\theta})\}_{pq} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \frac{\partial \log f(\boldsymbol{\omega})}{\partial \theta_p} \frac{\partial \log f(\boldsymbol{\omega})}{\partial \theta_q} d\boldsymbol{\omega}, \quad p, q = 1,2, \dots, m$$

- パラメータベクトル(m次元)　$\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}, \sigma)^T$

  $\boldsymbol{\beta}$ は回帰係数 $\beta_{\boldsymbol{k}}$ $(\boldsymbol{k} \neq \boldsymbol{0} \in K)$ を添字が辞書式になるように並べたベクトル

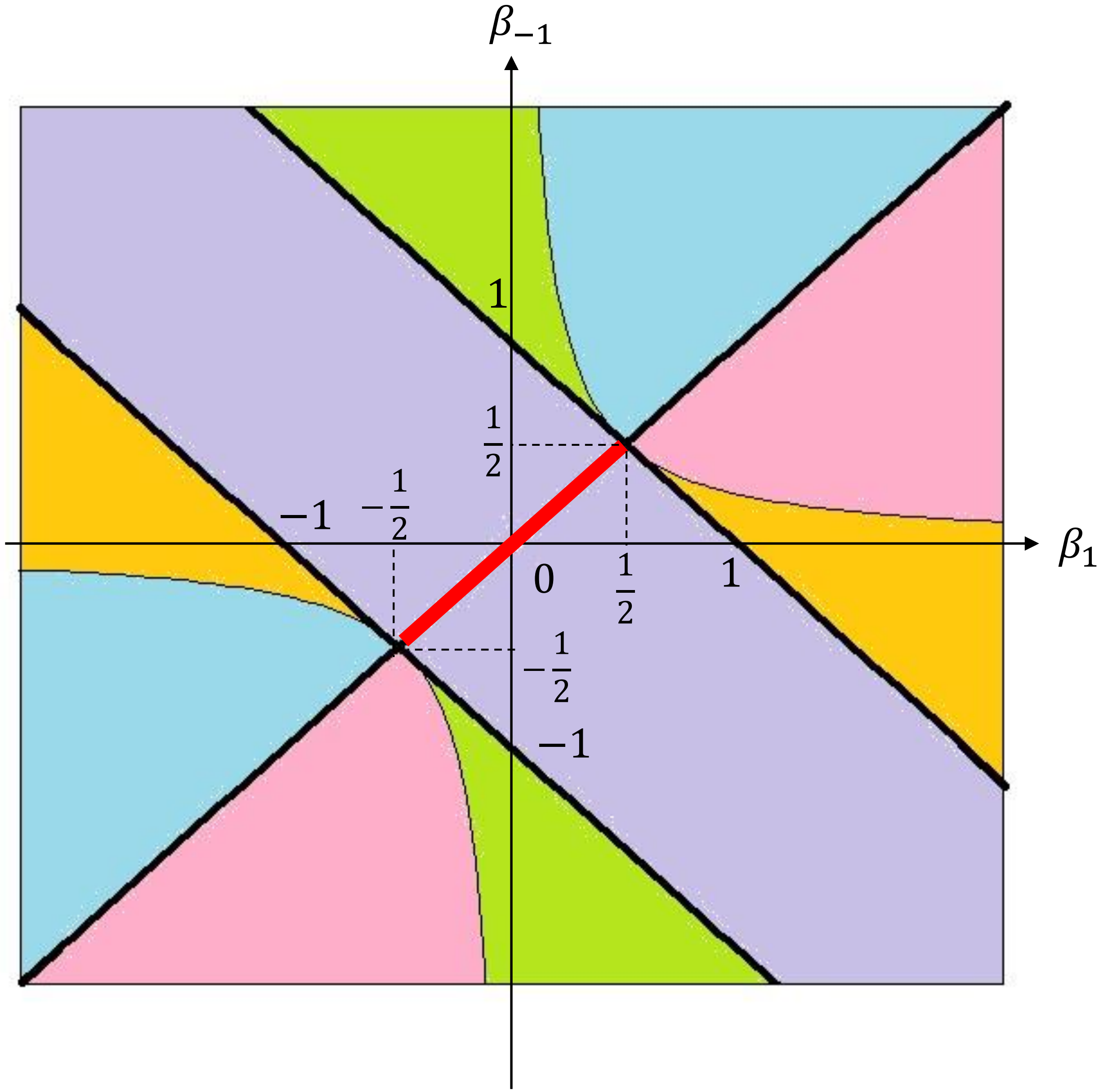
- スペクトル関数　$f(\boldsymbol{\omega}) = \dfrac{\sigma^2}{|P(z_1, \dots, z_n)|^2}$,　$z_i = \exp(i\omega_i)$,　$i = 1,2, \dots, n$

$I(\theta)$の計算

- グラジエント関数

$$\frac{\partial \log f(\boldsymbol{\omega})}{\partial \beta_\ell} = -2\mathrm{Re}\left(\frac{z_1^{\ell_1} \cdots z_n^{\ell_n}}{P(z_1, \dots, z_n)}\right), \quad \frac{\partial \log f(\boldsymbol{\omega})}{\partial \sigma} = \frac{2}{\sigma}$$

- $I(\boldsymbol{\theta})$ の式の形は，$P(z_1, \dots, z_n) = 0$, $P(z_1^{-1} \dots, z_n^{-1}) = 0$ の根と $|z_1| = |z_2| = \cdots = |z_n| = 1$ との位置関係によって変わる



$P(z) = 1 + \beta_1 z + \beta_{-1} z^{-1}$の場合

$\alpha_1, \alpha_2 : P(z) = 0$ の根

$\alpha_3, \alpha_4 : P(z^{-1}) = 0$ の根

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ が実数の場合，

$:(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = ($内，内，外，外$)$

$:(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = ($内，外，内，外$)$

$:(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = ($外，外，内，内$)$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ が虚数の場合，

$:(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = ($内，内，外，外$)$

$:(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = ($内，外，内，外$)$

上では，非定常

上で$I(\theta)$が非正則

$I(\boldsymbol{\theta})$ が非正則だと何が困るか

- 空間斉次自己回帰モデルにおける新しい近似尤度を考案（2012年本学会で発表）

$$L_A = \frac{1}{2}\log\det(\mathrm{A}) - \frac{N}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2}x^T\,\tilde{\mathrm{A}}x$$

- 漸近有効性

$$\sqrt{N}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}\right) \to \mathrm{N}(\mathbf{0}, I(\boldsymbol{\theta})^{-1}) \text{ as } n_1, n_2 \to \infty$$

  - 漸近有効性が成立するためには，$I(\boldsymbol{\theta})$ の正則性が仮定として必要
  - しかしこれについて誰も言及していない
  - $I(\boldsymbol{\theta})$ が非正則になるとき何が起こるかはわからない

$I(\boldsymbol{\theta})$ の正則性と二次形式 Q

$I(\boldsymbol{\theta})$が正則であるための必要十分条件 (1)

任意の$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ に対し，　$Q = \boldsymbol{x}^T I(\theta)\boldsymbol{x} \neq 0$

- $I(\boldsymbol{\theta})$ の二次形式 Q は，

$$Q = \int \left(\sum_{p=1}^{m} x_p \frac{\partial \log f(\boldsymbol{\omega})}{\partial \theta_p} \right)^2 d\omega$$

と書けるので，条件（１）は

$$\frac{\partial \log f(\boldsymbol{\omega})}{\partial \theta_p}, \quad p = 1,2, \ldots, m$$ が線形独立である

と書き換えられる

二次形式Qの書き換え

- $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{y}^T, y_\sigma)$ とする.
  - $\boldsymbol{y}$ は $y_{\boldsymbol{s}}$ $(\boldsymbol{s} \neq \boldsymbol{0} \in K)$ を要素とし，添字を辞書式に並べたもの
- $Y(z_1, \dots, z_n) = \sum_{\boldsymbol{s} \neq \boldsymbol{0} \in K} y_{\boldsymbol{s}} z_1^{s_1} \cdots z_n^{s_n}$ とすると，Qの被積分関数は

$$
\begin{aligned}
0 \neq \sum_{p=1}^{m} x_p \frac{\partial \log f(\boldsymbol{\omega})}{\partial \theta_p} &= \sum_{\boldsymbol{s} \neq \boldsymbol{0} \in K} y_{\boldsymbol{s}} \frac{\partial \log f(\boldsymbol{\omega})}{\partial \beta_{\boldsymbol{s}}} + y_\sigma \frac{\partial \log f(\boldsymbol{\omega})}{\partial \sigma} \\
&= -2\mathrm{Re}\left(\frac{Y(z_1, \dots, z_n)}{P(z_1, \dots, z_n)}\right) + \frac{2y_\sigma}{\sigma}
\end{aligned}
$$

$Q \neq 0$ の書き換え

- $$\mathrm{Re}\left(\frac{Y(z_1,\dots,z_n)}{P(z_1,\dots,z_n)}\right)-\frac{y_\sigma}{\sigma}\neq 0$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{Re}\left(P(z_1,\dots,z_n)Y(z_1^{-1},\dots,z_n^{-1})\right)-\frac{y_\sigma}{\sigma}|P(z_1,\dots,z_n)|^2\neq 0$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{Re}\left(\sum_{\boldsymbol{k}\in K}\beta_{\boldsymbol{k}}\sum_{\boldsymbol{s}\neq 0\in K}y_{\boldsymbol{s}}z_1^{k_1-s_1}\cdots z_n^{k_n-s_n}\right)-\sum_{\boldsymbol{k}\in K}\beta_{\boldsymbol{k}}\sum_{\boldsymbol{k}'\in K}\frac{y_\sigma}{\sigma}\beta_{\boldsymbol{k}'}z_1^{k_1-k_1'}\cdots z_n^{k_n-k_n'}\neq 0$$

$I(\boldsymbol{\theta})$が正則であるための必要十分条件 (2)　　（2013年本学会で発表）

任意の $(\boldsymbol{y}^T, y_\sigma)^T\neq\boldsymbol{0}$ について，ある ℓ で $\sum_{\boldsymbol{s}\neq 0\in K} y_{\boldsymbol{k}}(\beta_{\boldsymbol{s}-\ell}+\beta_{\boldsymbol{s}+\ell})-\frac{y_\sigma}{\sigma}\sum_{\boldsymbol{k}\in K}\beta_{\boldsymbol{k}}\beta_{\boldsymbol{k}-\ell}\neq 0$

$I(\boldsymbol{\theta})$ の正則条件の書き換え

- $\displaystyle\sum_{\boldsymbol{s}\neq 0\in K} y_{\boldsymbol{k}}(\beta_{\boldsymbol{s}-\ell}+\beta_{\boldsymbol{s}+\ell})-\frac{y_\sigma}{\sigma}\sum_{\boldsymbol{k}\in K}\beta_{\boldsymbol{k}}\beta_{\boldsymbol{k}-\ell}\neq 0 \Leftrightarrow \sum_{\boldsymbol{s}\in K}\left(y_{\boldsymbol{s}}-\frac{y_\sigma}{\sigma}\beta_{\boldsymbol{s}}\right)(\beta_{\boldsymbol{s}-\ell}+\beta_{\boldsymbol{s}+\ell})\neq 0$
- $a_{\boldsymbol{s}}=y_{\boldsymbol{s}}-\frac{y_\sigma}{\sigma}\beta_{\boldsymbol{s}}$ とおく.
  - $a_{\boldsymbol{s}}$ $(\boldsymbol{s}\in K)$ を要素とし，添字を辞書式に並べたベクトルを $\boldsymbol{a}$ とする.
  - $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0} \Leftrightarrow (\boldsymbol{y}^T, y_\sigma)^T=\boldsymbol{0}$
  - $y_{\boldsymbol{0}}=0$ としている.

$I(\boldsymbol{\theta})$が正則であるための必要十分条件 (3)

任意の $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ に対し，ある ℓ で $\displaystyle\sum_{\boldsymbol{s}\in K} a_{\boldsymbol{s}}(\beta_{\boldsymbol{s}-\ell}+\beta_{\boldsymbol{s}+\ell})\neq 0$

$I(\boldsymbol{\theta})$ の正則条件の書き換え

- $\sum_{s \in K} a_{\boldsymbol{s}}(\beta_{\boldsymbol{s}-\ell} + \beta_{\boldsymbol{s}+\ell}) \neq 0$ を，ベクトルを用いて $\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{\beta}_\ell \neq 0$ と表現する
  - $\boldsymbol{\beta}_\ell$ は $\boldsymbol{\beta}^{(\mathbf{0})}$ の要素の添字を $-\ell$，$+\ell$ ずつずらしたものの和
  - $\boldsymbol{\beta}^{(\mathbf{0})}$ は $\beta_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{k} \in K)$ を要素とし，添字が辞書式になるように並べたベクトル

$I(\boldsymbol{\theta})$が正則であるための必要十分条件 (4)

$$\dim\left\{\mathrm{Span}\{\boldsymbol{\beta}_\ell\ (\ell \in L)\}\right\} = m$$

L は $\boldsymbol{s} \in K$ に対し，$\boldsymbol{s} - \ell \in K$ または $\boldsymbol{s} + \ell \in K$ となるような ℓ を要素とする.

ただし，$\ell \in L$ のとき，$-\ell$ は L の要素から除く.

$\boldsymbol{\beta}_\ell$ の置き換え

- 一般に，$\boldsymbol{\beta}_\ell$ $(\ell \in L)$の一部を$(1,0,1,\dots,0,1)^T, (0,1,0,\dots,1,0)^T$ で置き換え可能

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_\mathbf{0} + \sum_{\ell \neq 0 \in L} \boldsymbol{\beta}_\ell = P(1,\dots,1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_\mathbf{0} - \sum_{\ell_1 = 2k+1 \in L} \boldsymbol{\beta}_\ell + \sum_{\ell_1 \neq 0, \ell_1 = 2k \in L} \boldsymbol{\beta}_\ell = P(-1,1,\dots,1)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$ より

$\boldsymbol{\beta}_\ell$ $(\ell \in L)$ の一部を$(1,0,1,\dots,0,1)^T, (0,1,0,\dots,1,0)^T$ で置き換えることができる.

$I(\boldsymbol{\theta})$が正則になるための必要十分条件

$I(\boldsymbol{\theta})$が正則になるための必要十分条件 (5)

$$\dim\left\{\mathrm{Span}\{\,\boldsymbol{\beta}_\ell\ (\ell \in L'), \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}\right\} = m$$

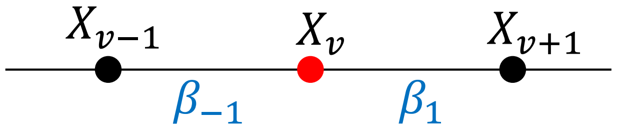
L' は L の要素から $\mathbf{0}$, $(1,0,\dots,0)^T$ を除いた集合.

L は $s \in K$ に対し，$s-\ell \in K$ または $s+\ell \in K$ となるような ℓ を要素とする.

ただし，$\ell \in L$ のとき，$-\ell$ は L の要素から除く.

$\boldsymbol{e}_1 = (1,0,1,\dots,0,1)^T, \boldsymbol{e}_2 = (0,1,0,\dots,1,0)^T$である.

例



- 1 次元弱定常斉次自己回帰モデルを考える

$$X_v + \beta_1 X_{v+1} + \beta_{-1} X_{v-1} = \varepsilon_v$$

  - $P(z) = 1 + \beta_1 z + \beta_{-1} z^{-1}$
  - $m = 3$
  - $K = \{-1,0,1\}$
  - $L = \{0,1,2\}$
  - $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}^T, \sigma)^T$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_{-1}, \beta_1)^T$
  - $\boldsymbol{\beta}^{(0)} = (\beta_{-1}, \beta_0, \beta_1)^T$

  - $\boldsymbol{\beta}_0, \boldsymbol{\beta}_1$ は $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と置き換え
  - $\boldsymbol{\beta}_2 = \begin{pmatrix} \beta_{-1-2} + \beta_{-1+2} \\ \beta_{0-2} + \beta_{0+2} \\ \beta_{1-2} + \beta_{1+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{-3} + \beta_1 \\ \beta_{-2} + \beta_2 \\ \beta_{-1} + \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ 0 \\ \beta_{-1} \end{pmatrix}$

- $\mathrm{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \beta_{-1} \end{pmatrix} = 3$ となる条件より,

  $I(\theta)$ が正則になるための必要十分条件は $\beta_1 \neq \beta_{-1}$ （図の結果と合っている）

今後の課題

- L の要素数を減らす．
  - $\dim\{\mathrm{Span}\{\boldsymbol{\beta}_\ell\ (\ell \in L)\}\} = m$ より，L の要素数は m 個まで絞れるはず
- $I(\boldsymbol{\theta})$ が非正則になる場合は，現象として何を意味するのか．なぜ起こるのか．
  - 次元数には関係ない
  - モデルに方向性がないことが原因
  - 2次元以上のモデルで具体的に正則性の必要十分条件を出せば･･･
- $I(\boldsymbol{\theta})$ が非正則になる場合，新しい近似尤度による推定で何が起こるのか．
- $I(\boldsymbol{\theta})$ が非正則になる場合，代わりの推定法は？