空間斉次自己回帰モデルに従う乱数生成とそれに基づく実験

慶應義塾大学 ／ 早稲田大学　　力丸佑紀
（株）データサイエンスコンソーシアム ／ 慶應義塾大学 ／ 早稲田大学　　柴田里程

目的

- 空間斉次自己回帰モデルにおける新しい近似尤度を考案

$$L_A = \frac{1}{2}\log\det(\mathrm{A}) - \frac{N}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2}x^T\tilde{\mathrm{A}}x$$ （本学会にて発表(2012)）

  - 理論上、一致性、漸近有効性が成立
  - これらを確かめるため、乱数による数値実験を行いたい
    - 従来研究では、乱数生成法は確立されていない

Main Result

空間斉次自己回帰モデルに従う乱数を生成

- 乱数生成が困難な理由
- 乱数生成法とその例
- 乱数が正しく生成されていることを確認
- 生成した乱数を用いた、新しい近似尤度によるパラメータ推定の結果

二次元上の空間斉次自己回帰モデル

- 定義

弱定常過程$\{X_{v_1,v_2}\}$に対し、二次元上の空間斉次自己回帰モデルは

$$P(T_1,T_2)X_{v_1,v_2} = \varepsilon_{v_1,v_2}$$

で表される。ただし、

$$P(T_1,T_2) = \sum_{k\in K} \beta_k T_1^{k_1} T_2^{k_2} \ , \quad \beta_{00} = 1 \, , \quad T_1 X_{v_1 v_2} = X_{v_1+1,v_2} \ , T_2 X_{v_1,v_2} = X_{v_1,v_2+1} \, ,$$

$K = \{(k_1,k_2) | -k_{1L} \leq k_1 \leq k_{1H}, -k_{2L} \leq k_2 \leq k_{2H},\ k_{1L}, k_{1H}, k_{2L}, k_{2H} > 0\}$ である。

- 空間斉次自己回帰モデルの特性
  - ε_{v_1,v_2}は互いに独立である

    $E(\varepsilon_{v_1,v_2}) = 0,\ (v_1,v_2) \neq (u_1,u_2)$のとき $E\left(\varepsilon_{v_1,v_2}\varepsilon_{u_1,u_2}\right) = \sigma^2, E\left(\varepsilon_{v_1,v_2}\varepsilon_{v_1,v_2}\right) = 0.$
  - ε_{v_1,v_2}はイノベーションではない

    すべての(v_1,v_2)に対し、$E\left(X_{u_1,u_2}\varepsilon_{v_1,v_2}\right) \neq 0.$

空間斉次自己回帰モデルの例

伝達関数が

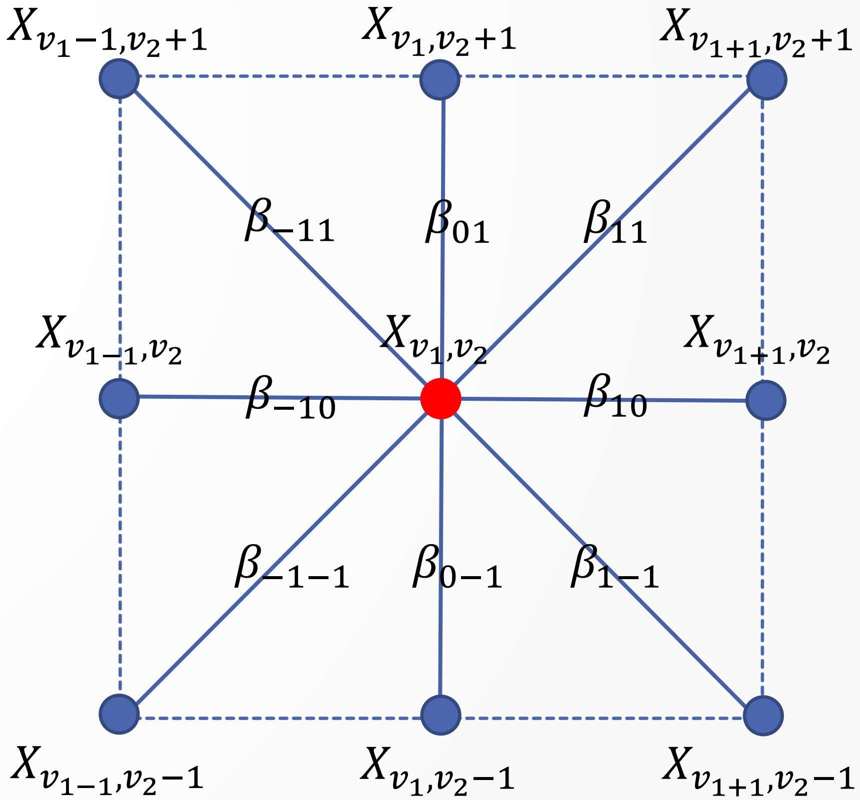
$$P(z_1, z_2) = 1 + \beta_{10} z_1 + \beta_{-10} z_1^{-1} + \beta_{01} z_2 + \beta_{0-1} z_2^{-1} + \beta_{11} z_1 z_2 + \beta_{1-1} z_1 z_2^{-1} + \beta_{-11} z_1^{-1} z_2 + \beta_{-1-1} z_1^{-1} z_2^{-1}$$

であるとき、

$$\mathrm{X}_{v_1,v_2} = -\beta_{10} X_{v_1+1,v_2} + \beta_{-10} X_{v_1-1,v_2} + \beta_{01} X_{v_1,v_2+1} + \beta_{0-1} X_{v_1,v_2-1}$$

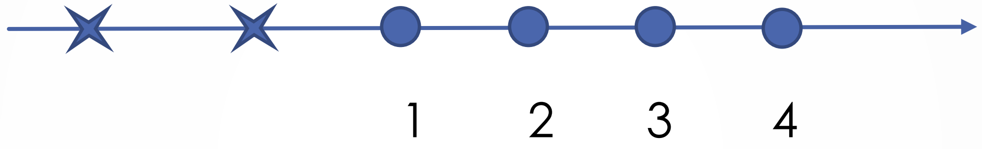
$$+\beta_{11} X_{v_1+1,v_2+1} + \beta_{1-1} X_{v_1+1,v_2-1} + \beta_{-11} X_{v_1-1,v_2+1} + \beta_{-1-1} X_{v_1-1,v_2-1}$$

$$+\varepsilon_{v_1,v_2}$$



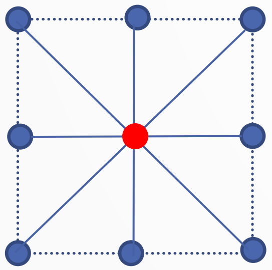
空間斉次自己回帰モデルに従う乱数生成が困難な理由

- 初期値の設定が困難
  - 時系列自己回帰モデルの場合　（例：AR(2)モデル  ）

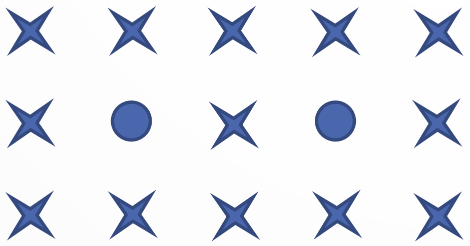


  - 二次元空間斉次自己回帰モデルの場合

モデルが

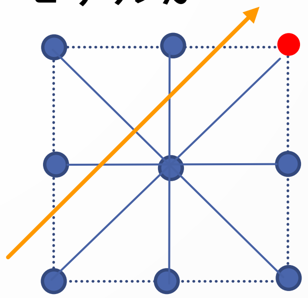


初期値の配置は



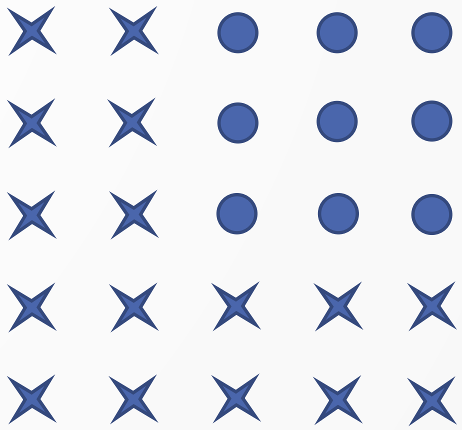
周りの点を必要とすることが問題
（方向性がない）

モデルが



の場合、

初期値の配置は



初期値の問題の解決策として

- 伝達関数を書き換える

$$P(z_1, z_2) = 1 + \beta_{10} z_1 + \beta_{-10} z_1^{-1} + \beta_{01} z_2 + \beta_{0-1} z_2^{-1} + \beta_{11} z_1 z_2 + \beta_{1-1} z_1 z_2^{-1} + \beta_{-11} z_1^{-1} z_2 + \beta_{-1-1} z_1^{-1} z_2^{-1}$$

$$= \beta_{11} z_1 z_2 \underbrace{\left(\frac{1}{\beta_{11}} z_1^{-1} z_2^{-1} + \frac{\beta_{10}}{\beta_{11}} z_2^{-1} + \frac{\beta_{-10}}{\beta_{11}} z_1^{-2} z_2^{-1} + \frac{\beta_{01}}{\beta_{11}} z_1^{-1} + \frac{\beta_{0-1}}{\beta_{11}} z_1^{-1} z_2^{-2} + 1 + \frac{\beta_{1-1}}{\beta_{11}} z_2^{-2} + \frac{\beta_{-11}}{\beta_{11}} z_1^{-2} + \frac{\beta_{-1-1}}{\beta_{11}} z_1^{-2} z_2^{-2} \right)}_{=Q(z_1, z_2)\text{とする}}$$

$$P(T_1, T_2) X_{v_1, v_2} = \varepsilon_{v_1, v_2}$$

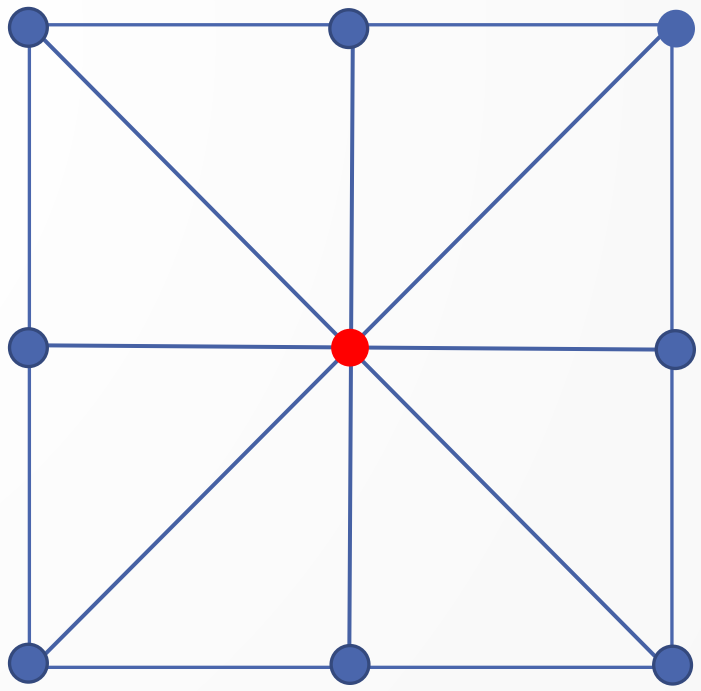
$$\Leftrightarrow \beta_{11} T_1 T_2 Q(T_1, T_2) X_{v_1, v_2} = \varepsilon_{v_1, v_2}$$

$$\Leftrightarrow Q(T_1, T_2) X_{v_1, v_2} = \frac{1}{\beta_{11}} T_1^{-1} T_2^{-1} \varepsilon_{v_1, v_2}$$

$$\Leftrightarrow Q(T_1, T_2) X_{v_1, v_2} = \underbrace{\frac{1}{\beta_{11}} \varepsilon_{v_1-1, v_2-1}}_{=\xi_{v_1,v_2}\text{とする}}$$

$$\Leftrightarrow Q(T_1, T_2) X_{v_1, v_2} = \xi_{v_1, v_2}$$

イノベーションでないという性質を保ちながら
ξ_{v_1,v_2}を生成することは困難



空間斉次自己回帰モデルに従う乱数の生成法

Idea

$$P(T_1, T_2)X_{v_1,v_2} = \varepsilon_{v_1,v_2} \quad \Leftrightarrow \quad X_{v_1,v_2} = P(T_1, T_2)^{-1}\varepsilon_{v_1,v_2}$$

- $P(z_1, z_2)^{-1}$を冪級数の形で表現できればよい。
  - 一般に$P(z_1, z_2)^{-1}$のローラン展開は難しい。
- 伝達関数を$P(z_1, z_2) = P_1(z_1)P_2(z_2)$と分解できる場合について乱数生成法を考案

$$P_1(z_1) = \sum_{k_1=-p_1}^{q_1} a_{k_1} z_1^{k_1}, \quad a_0 = 1,$$
$$P_2(z_2) = \sum_{k_2=-p_2}^{q_2} b_{k_2} z_2^{k_2}, \quad b_0 = 1.$$

  - $P_1(z_1)^{-1}, P_2(z_2)^{-1}$を正冪のみの冪級数、または負冪のみの冪級数の積の形に分解する　　**初期値の問題を解消できる**

- $P_1(z_1)$を以下のように因数分解する。

$$P_1(z_1) = \sum_{k_1=-p_1}^{q_1} a_{k_1} z_1^{k_1} = c \prod_{j_1=1}^{q_1} \prod_{k_1=-p_1}^{-1} (1 - \alpha_{j_1} z_1)(1 - \alpha_{k_1} z_1^{-1})$$

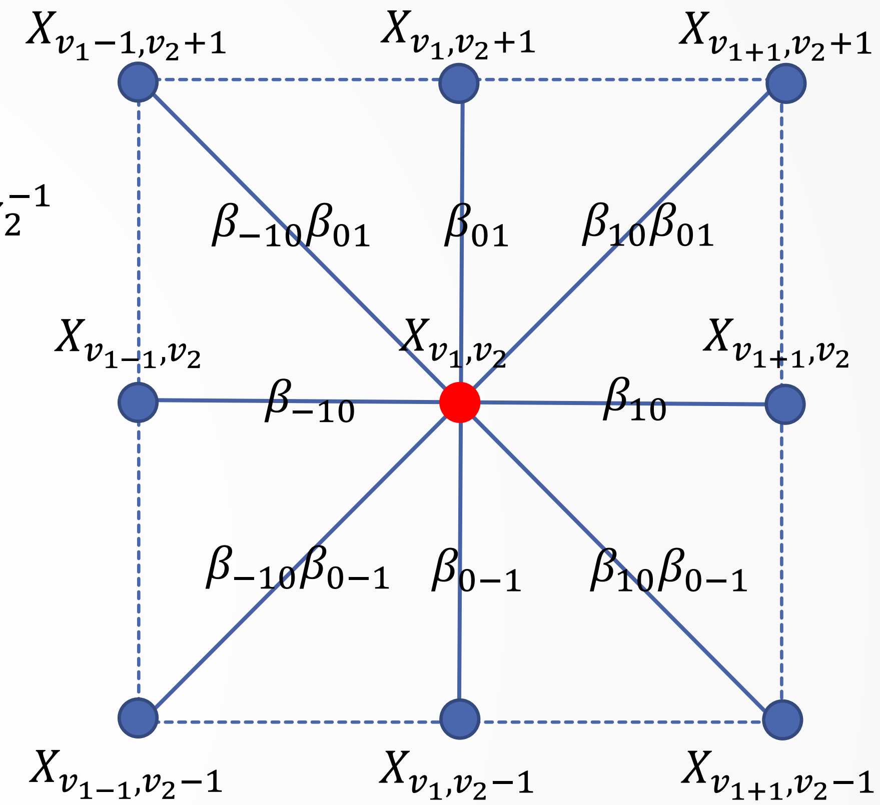
- $P(z_1)$の各因数の逆関数を以下のように冪級数展開する。
  - $|\alpha_{j_1}| < 1$ なら、$(1 - \alpha_{j_1} z_1)^{-1} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (\alpha_{j_1} z_1)^{\ell}$
  - $|\alpha_{j_1}| > 1$ なら、$(1 - \alpha_{j_1} z_1)^{-1} = -(\alpha_{j_1} z_1)^{-1} \left(1 - \frac{1}{\alpha_{j_1}} z_1^{-1}\right) = -\frac{1}{\alpha_{j_1}} z_1^{-1} \sum_{\ell=0}^{\infty} (\alpha_{j_1} z_1)^{-\ell}$
    - $P_1(z_1)^{-1}$は正冪のみの冪級数と負冪のみの冪級数の積だけで書ける。
- 同様に$P_2(z_2)^{-1}$も展開する。
- $X_{v_1,v_2} = P_1(z_1)^{-1} P_2(z_2)^{-1} \varepsilon_{v_1,v_2}$ より、生成したε_{v_1,v_2}に冪級数を順々に演算していけば、X_{v_1,v_2}が得られる。

乱数生成の例

$$P(z_1,z_2) = 1 + \beta_{10}z_1 + \beta_{-10}z_1^{-1} + \beta_{01}z_2 + \beta_{0-1}z_2^{-1}$$

$$+\beta_{10}\beta_{01}z_1z_2 + \beta_{10}\beta_{0-1}z_1z_2^{-1} + \beta_{-10}\beta_{01}z_1^{-1}z_2 + \beta_{-10}\beta_{0-1}z_1^{-1}z_2^{-1}$$

$$= \underbrace{(1 + \beta_{10}z_1 + \beta_{-10}z_1^{-1})}_{= P_1(z_1)}\underbrace{(1 + \beta_{01}z_2 + \beta_{0-1}z_2^{-1})}_{= P_2(z_2)}$$



- $P_1(z_1)$を因数分解する

$$P_1(z_1) = \frac{1}{1+\alpha_1\alpha_2}(1-\alpha_1 z_1)(1-\alpha_2 z_1^{-1})$$ と分解できる。

ただし、 $\alpha_1 = \frac{-1+\sqrt{1-4\beta_{10}\beta_{-10}}}{2\beta_{-10}}, \alpha_2 = \frac{-1+\sqrt{1-4\beta_{10}\beta_{-10}}}{2\beta_{10}}$

いま、 $|\alpha_1| < 1, |\alpha_2| < 1$ とする。

$P_1(z_1)^{-1}, P_2(z_2)^{-1}$を冪級数展開する

$|\alpha_1| < 1, |\alpha_2| < 1$なので、

$(1-\alpha_1 z_1)^{-1} = 1 + \alpha_1 z_1 + \alpha_1^2 z_1^2 + \cdots = \sum_{\ell=0}^{\infty}(\alpha_1 z_1)^{\ell}$

$(1-\alpha_2 z_1^{-1})^{-1} = 1 + \alpha_2 z_1^{-1} + \alpha_2^2 z_1^{-2} + \cdots = \sum_{m=0}^{\infty}(\alpha_2 z_1^{-1})^{m}$

と展開でき、

$$P_1(z_1)^{-1} = (1+\alpha_1\alpha_2)(1-\alpha_1 z_1)^{-1}(1-\alpha_2 z_2)^{-1} = (1+\alpha_1\alpha_2)\sum_{\ell=0}^{\infty}(\alpha_1 z_1)^{\ell}\sum_{m=0}^{\infty}(\alpha_2 z_1^{-1})^{m}$$

となる。同様に、

実際は適当な有限の値 k で打ち切る

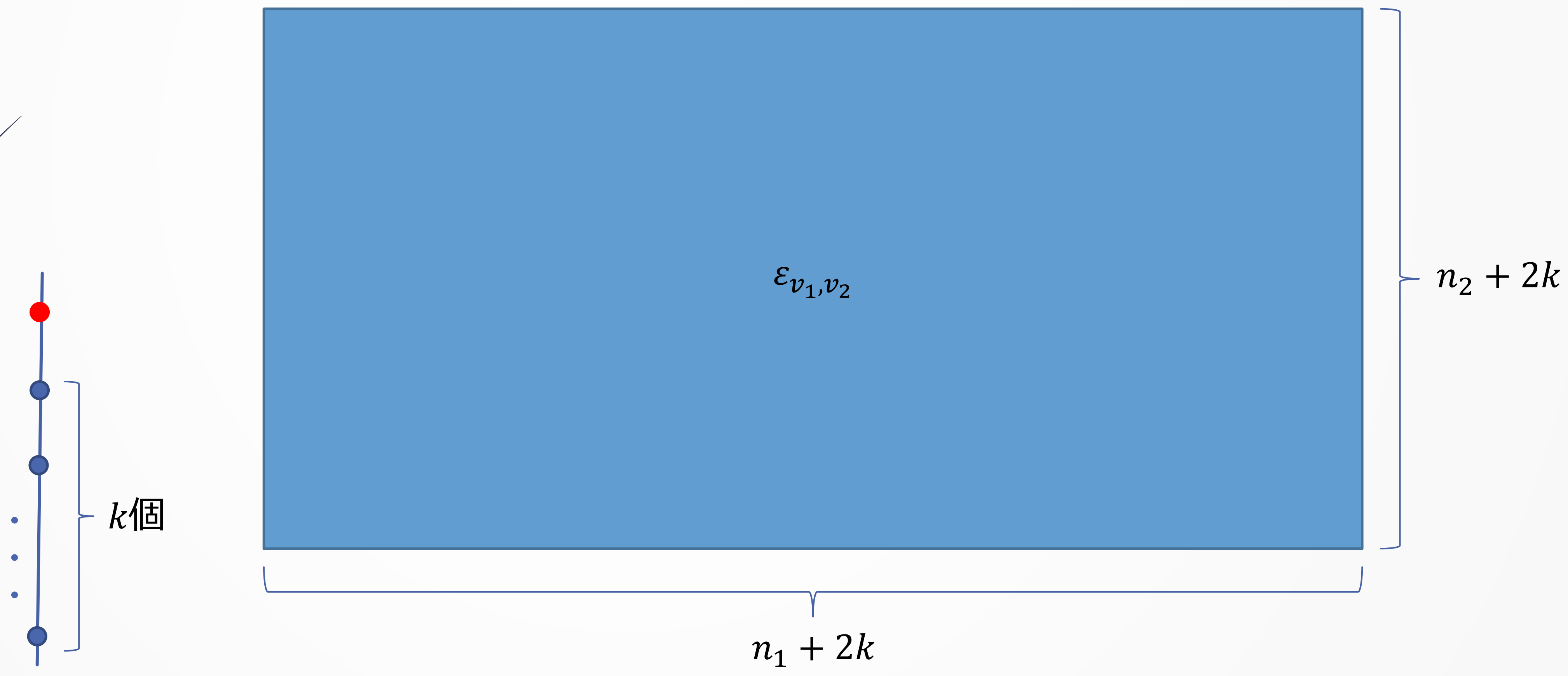
$$P_2(z_2)^{-1} = (1+\alpha_3\alpha_4)\sum_{\ell=0}^{\infty}(\alpha_3 z_2)^{\ell}\sum_{m=0}^{\infty}(\alpha_4 z_2^{-1})^{m}$$

ただし、 $\alpha_3 = \dfrac{-1+\sqrt{1-4\beta_{01}\beta_{0-1}}}{2\beta_{0-1}}, \alpha_4 = \dfrac{-1+\sqrt{1-4\beta_{01}\beta_{0-1}}}{2\beta_{01}}$

いま、 $|\alpha_3| < 1, |\alpha_4| < 1$ とした。

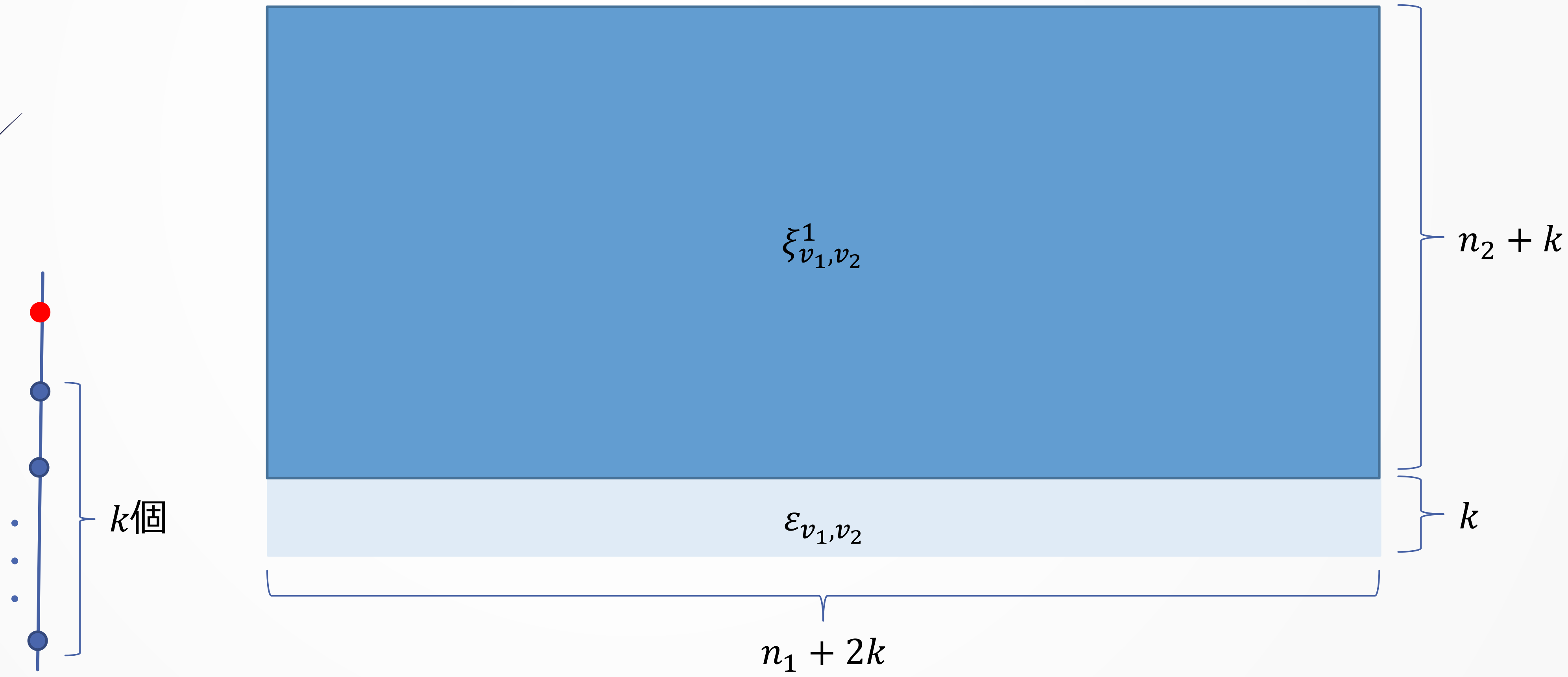
$X_{v_1,v_2} = P(z_1,z_2)^{-1}\varepsilon_{v_1,v_2}$から$n_1 \times n_2$の大きさの乱数を生成

$$X_{v_1,v_2} = (1+\alpha_1\alpha_2)(1+\alpha_3\alpha_4)(1+\alpha_1 T_1 + \cdots + \alpha_1^k T_1^k)(1+\alpha_2 T_1^{-1} + \cdots + \alpha_2^k T_1^{-k})$$
$$\times \left(1+\alpha_3 T_2 + \cdots + \alpha_3^k T_2^k\right)\left(1+\alpha_4 T_2^{-1} + \cdots + \alpha_4^k T_2^{-k}\right)\varepsilon_{v_1,v_2}$$



$X_{v_1,v_2} = P(z_1,z_2)^{-1}\varepsilon_{v_1,v_2}$から乱数を生成

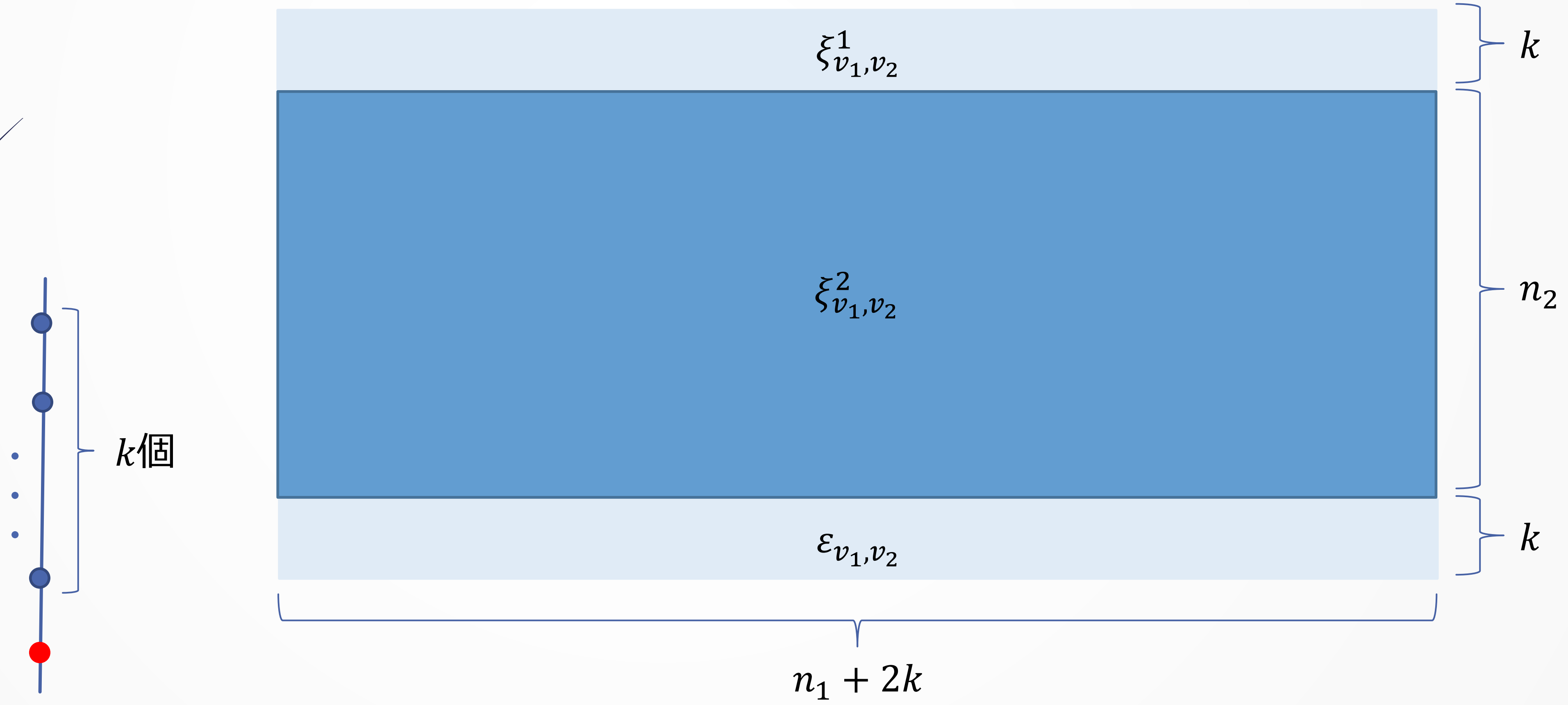
$$X_{v_1,v_2} = (1+\alpha_1\alpha_2)(1+\alpha_3\alpha_4)(1+\alpha_1 T_1+\cdots+\alpha_1^k T_1^k)(1+\alpha_2 T_1^{-1}+\cdots+\alpha_2^k T_1^{-k})$$
$$\times\left(1+\alpha_3 T_2+\cdots+\alpha_3^k T_2^k\right)\underbrace{\left(1+\alpha_4 T_2^{-1}+\cdots+\alpha_4^k T_2^{-k}\right)\varepsilon_{v_1,v_2}}_{}=\xi^1_{v_1,v_2}$$



$X_{v_1,v_2} = P(z_1,z_2)^{-1}\varepsilon_{v_1,v_2}$から乱数を生成

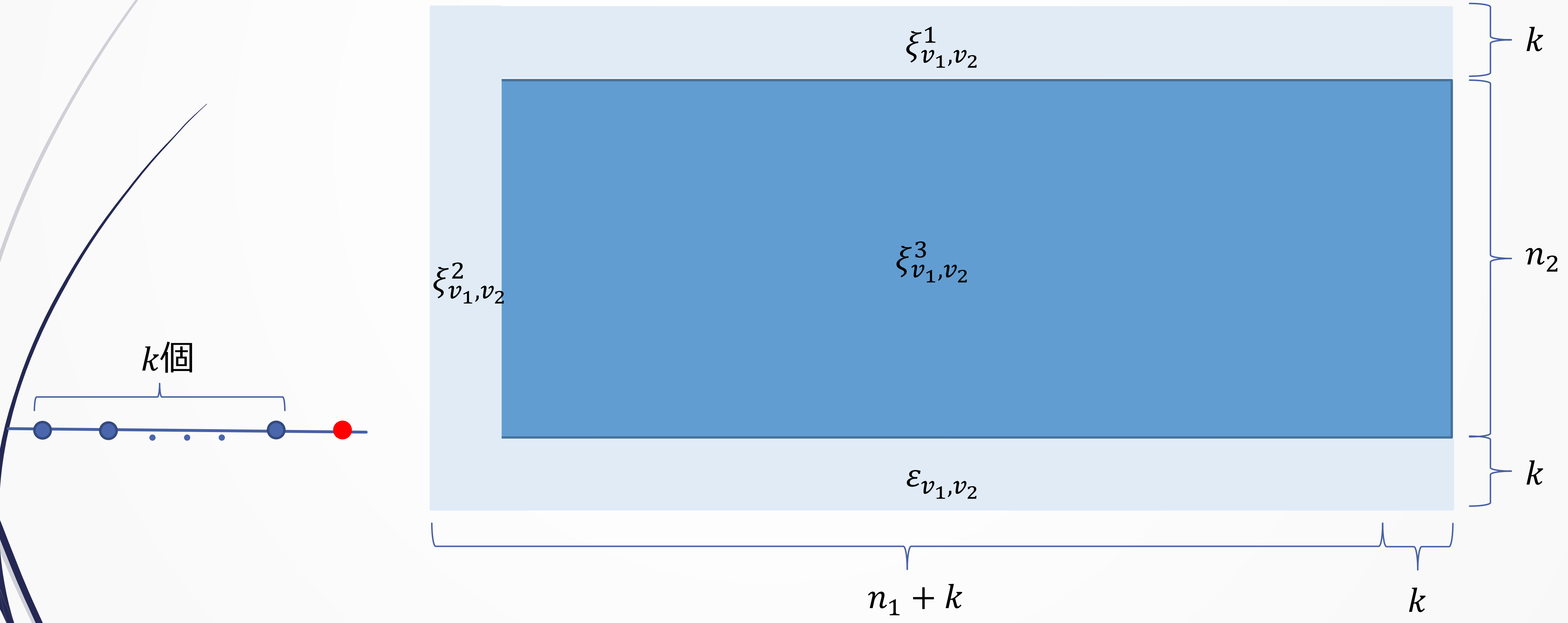
$$X_{v_1,v_2} = (1+\alpha_1\alpha_2)(1+\alpha_3\alpha_4)(1+\alpha_1 T_1+\cdots+\alpha_1^k T_1^k)(1+\alpha_2 T_1^{-1}+\cdots+\alpha_2^k T_1^{-k})\ \xi^2_{v_1,v_2}$$

$$\times \underbrace{\left(1+\alpha_3 T_2+\cdots+\alpha_3^k T_2^k\right)\xi^1_{v_1,v_2}}_{} = \xi^2_{v_1,v_2}$$



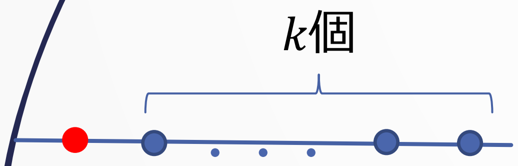
$X_{v_1,v_2} = P(z_1,z_2)^{-1}\varepsilon_{v_1,v_2}$から乱数を生成

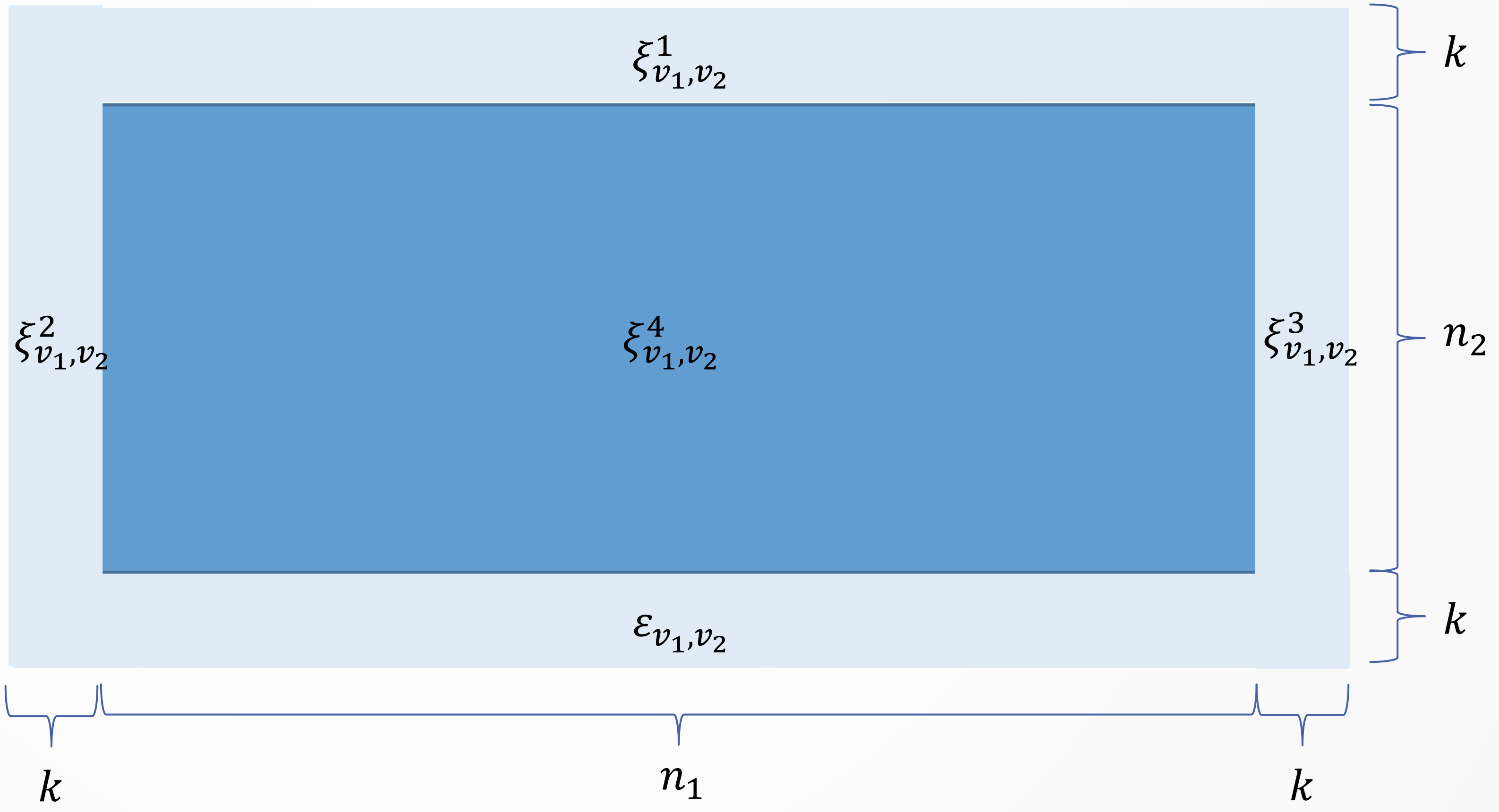
$$X_{v_1,v_2} = (1+\alpha_1\alpha_2)(1+\alpha_3\alpha_4)(1+\alpha_1 T_1+\cdots+\alpha_1^k T_1^k)\underbrace{(1+\alpha_2 T_1^{-1}+\cdots+\alpha_2^k T_1^{-k})\,\xi^2_{v_1,v_2}}_{=\xi^3_{v_1,v_2}}$$



$X_{v_1,v_2} = P(z_1, z_2)^{-1} \varepsilon_{v_1,v_2}$から乱数を生成

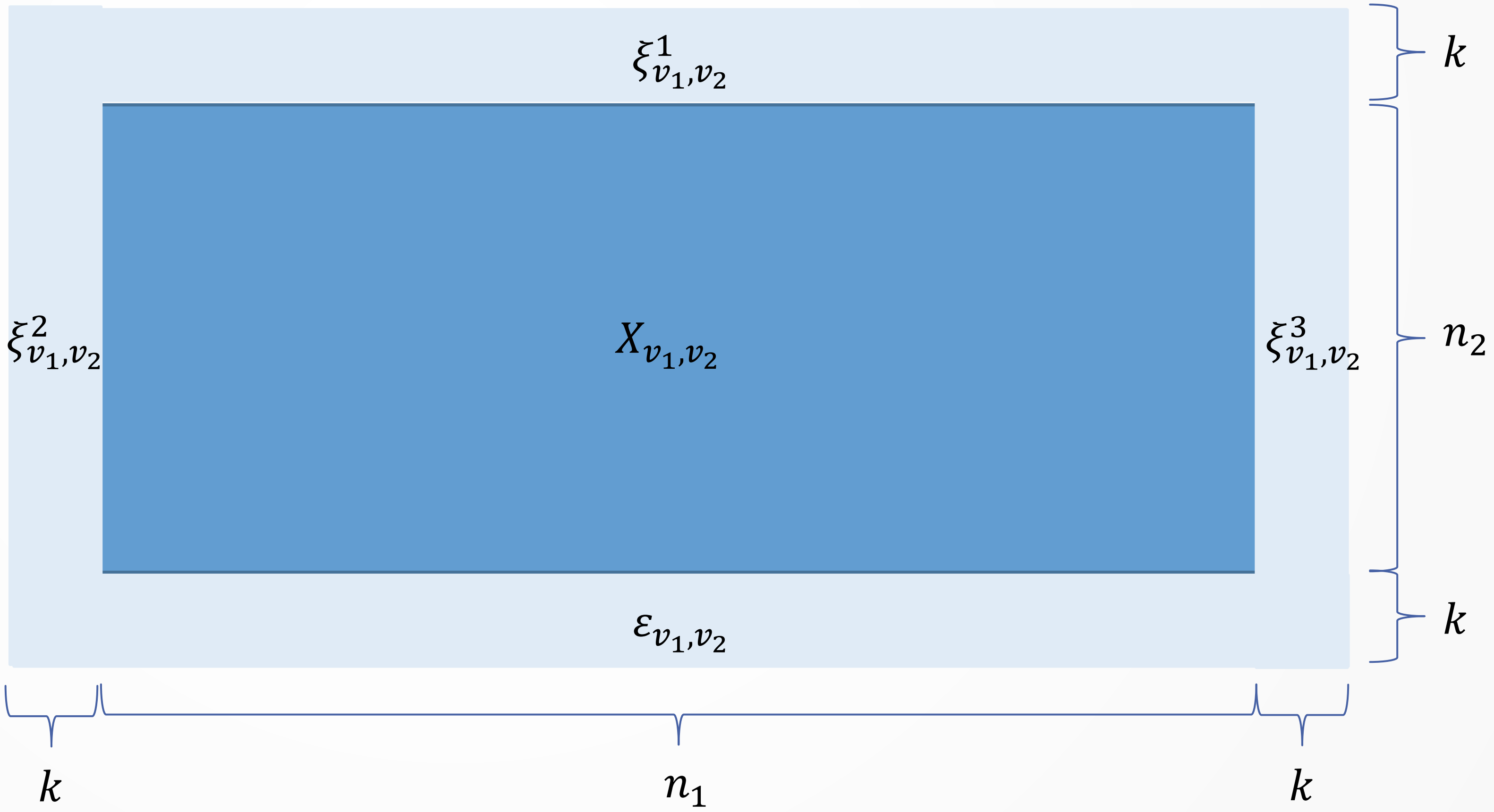
$$X_{v_1,v_2} = (1+\alpha_1\alpha_2)(1+\alpha_3\alpha_4)\underbrace{(1+\alpha_1 T_1 + \cdots + \alpha_1^k T_1^k)\xi^3_{v_1,v_2}}_{=\xi^4_{v_1,v_2}}$$





- $X_{v_1,v_2} = P(z_1,z_2)^{-1}\varepsilon_{v_1,v_2}$から乱数を生成

$$X_{v_1,v_2} = \underline{(1+\alpha_1\alpha_2)(1+\alpha_3\alpha_4)\xi^4_{v_1,v_2}}$$



生成した乱数の評価

- 乱数を生成
  - $P(z_1, z_2) = (1 + \beta_{10} z_1 + \beta_{-10} z_1^{-1})(1 + \beta_{01} z_2 + \beta_{0-1} z_2^{-1})$のとき、
    $\beta_{10} = 0.6,\ \beta_{-10} = 0.3,\ \beta_{01} = 0.4,\ \beta_{0-1} = 0.5,\ \sigma = 0.01$として乱数を生成
  - 大きさは、$n_1 = 50, n_2 = 50$
  - $k = 20$として生成
- ペリオドグラムとスペクトル密度を比較
  - ペリオドグラム

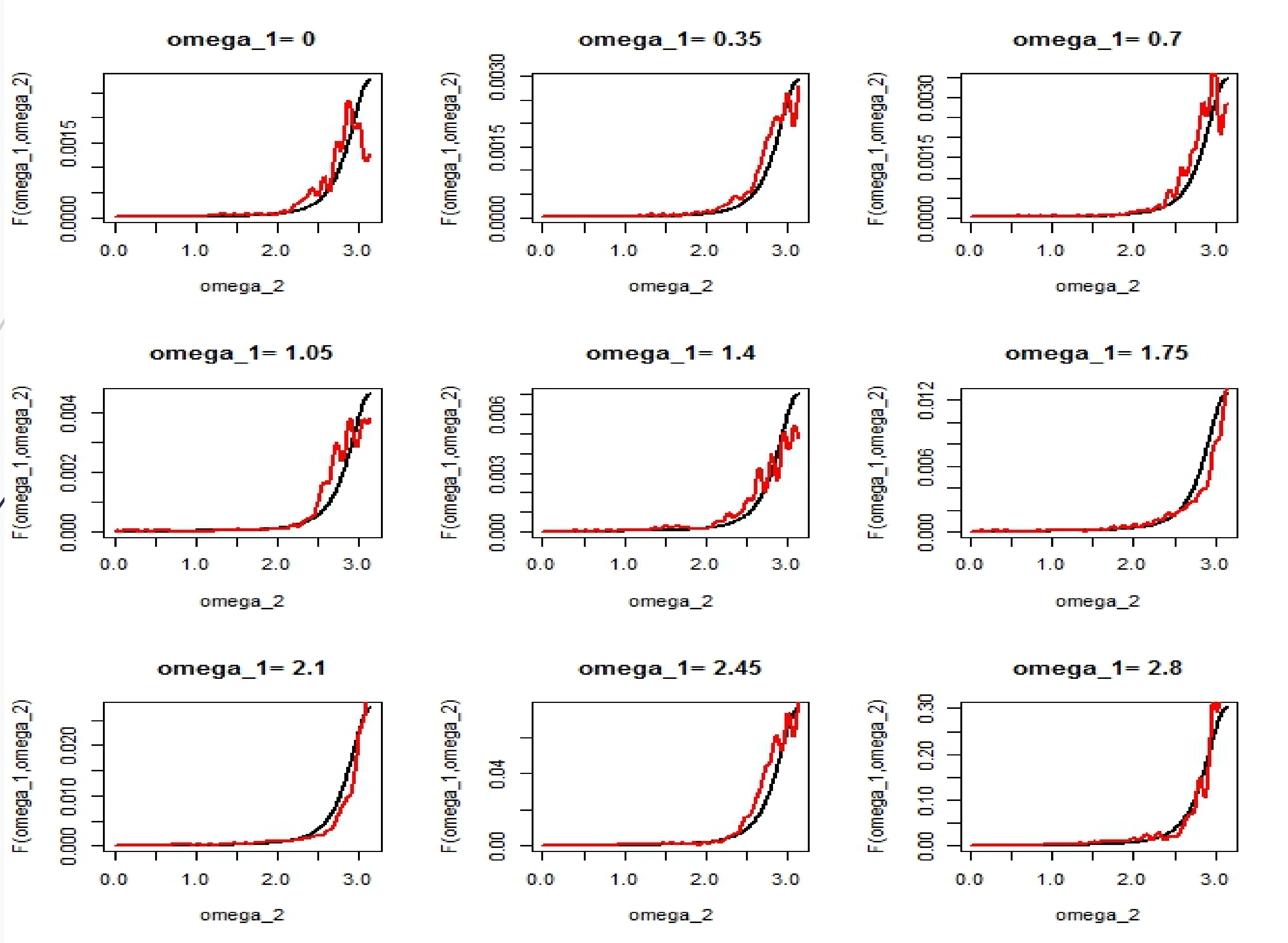
$$\hat{F}(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{N} \sum_{k_1 = -n_1+1}^{n_1-1} \sum_{k_2 = -n_2+1}^{n_2-1} w(k_2) w(\mathrm{k}_1) X_{v_1, v_2} X_{v_1+k_1, v_2+k_2}\ e^{-i(\omega_1 k_1 + \omega_2 k_2)}$$

今回は窓関数として、$w(k) = 0.5 - 0.5\cos\left(\frac{2\pi k}{n-1}\right) + \pi$を使用。

  - スペクトル密度

$$F(\omega_1, \omega_2) = \frac{\sigma^2}{|P(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2})|^2}$$

ペリオドグラムとスペクトル密度の比較



黒：スペクトル密度
赤：ペリオドグラム

生成した乱数を用いた、新しい近似尤度によるパラメータ推定

- $P(z_1, z_2) = (1 + \beta_{10} z_1 + \beta_{-10} z_1^{-1})(1 + \beta_{01} z_2 + \beta_{0-1} z_2^{-1})$とする
- $\beta_{10} = 0.6,\ \beta_{-10} = 0.3,\ \beta_{01} = 0.4,\ \beta_{0-1} = 0.5,\ \sigma = 0.01, k = 20$として乱数生成
- 新しい近似尤度L_Aを用いて50回の推定を行った
  - $n_1 = 30, n_2 = 30$の場合

	β_{10}	β_{-10}	β_{01}	β_{0-1}	σ
平均	0.61740	0.25104	0.31033	0.56034	0.015340
標準誤差	0.010153	0.0093245	0.0095698	0.0096008	0.00021964

  - $n_1 = 40, n_2 = 40$の場合

	β_{10}	β_{-10}	β_{01}	β_{0-1}	σ
平均	0.60599	0.26568	0.35187	0.52302	0.013939
標準誤差	0.0087964	0.0086213	0.0082995	0.0084986	0.00017850

観測数が増えるほど、平均は乱数生成をしたときの値に近くなり、標準誤差は小さくなっている。

まとめ

- 伝達関数が$P(z_1, z_2) = P_1(z_1)P_2(z_2)$の形の場合について、空間斉次自己回帰モデルに従う乱数を生成する方法を確立した。
  - この方法で生成すれば、もとのモデルに従うような乱数が生成できていることが確認できた。
  - 他のパターンのモデルの乱数生成は課題として残る。
- 空間斉次自己回帰モデルにおける新しい近似尤度を用いて推定した推定量は一致性、漸近有効性を持つことが理論的に証明でき、かつ、数値実験でも確認できた。